ЛЕКЦИЯ-6

§3. Дәрежелік қатарлар және олардың қасиеттері

Функциялық қатарлардың ішіндегі математикалық анализдегі маңыздысының біреуі дәрежелік қатарлар.

Анықтама. Дәрежелік қатар деп төмендегі функциялық қатарды:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \qquad (1)$$

немесе

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \qquad (1')$$

атайды, мұндағы a тұрақты сан, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ тұрақтыларды дәрежелік қатардың коэффициенттері деп атайды. $(1')$ қатарды $x' = x - a$ алмастырумен (1) қатарға келтіруге болады, сондықтан алдағы уақытта (1) қатарды қарастырамыз.

1-теорема.(Абель теоремасы). Егер (1) қатар $x = x_0 \neq 0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол барлық $|x| < |x_0|$ мәндерінде абсолютті жинақты, (1) қатар $x = x_1$ нүктесінде жинақсыз болса, барлық $|x| > |x_1|$ мәндерінде жинақсыз.

Дәлелдеуі. Теорема шарты бойынша қатар

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^{\ 2} + \ldots + c_n x_0^{\ n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^{\ n}$$

жинақты, сондықтан жалпы мүшесі $n \to \infty$ да нөлге ұмтылады. Олай болса бір тұрақты M саны табылып,

$$\left| c_n x_0^{\ n} \right| \le \mathrm{M}, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

теңсіздігі орындалады.

Енді (1) қатардың жалпы мүшесін түрлендірейік:

$$\left| c_n x^n \right| \le \left| c_n x_0^{\ n} \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le \mathrm{M} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = Mq^n \ , q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \ .$$

Оң мүшелі сан қатары

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$$

(1) қатардың можаранты болатын жинақты қатар, онда Вейерштрасс теоремасы бойынша (1) қатар абсолютті жинақты.

Егер (1) қатар $x = x_1$ нүктесінде жинақсыз болса, онда $|x| > |x_1|$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ қатар жинақсыз.

Олай болмаған жағдайда жоғарыдағы дәлелдеуіміз бойынша, (1) қатар жинақты болар еді, бұл мүмкін емес.

Теорема дәлелденді.